239

$\lambda_2=\lambda_3=1 \quad [A-\lambda I]X=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1-3x_2+x_3=0$
$x_3=\alpha$
$x_2=\beta$
$x_1=3\beta-\alpha$

$$N(A-\lambda I)=\left\{ \begin{bmatrix} 3\beta-\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R} \right\}$$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ özvektörlerdir

240

Benzer Matrisler:

Teorem: A ve B, $n\times n$ tipinde matrisler olsun. Eğer A ile B benzer matrisler ise bu iki matris aynı karakteristik polinoma sahiptir ve dolayısıyla aynı özdeğere sahiptirler.

Kanıt: $P_A(\lambda)$ ve $P_B(\lambda)$ sırasıyla A ve B matrislerinin karakteristik polinomları olsun. A ve B benzer matrisler olduğundan öyle bir S matrisi vardır ki S singüler değil ve

$$B=S^{-1}AS$$

dır.

241

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B-\lambda I) \\ &= \det(S^{-1}AS-\lambda I) \\ &= \det(S^{-1}(A-\lambda I)S) \\ &= \det(S^{-1})\cdot\det(A-\lambda I)\cdot\det S \\ &= \det(A-\lambda I) \\ &= P_A(\lambda) \end{aligned}$$

Aynı karakteristik polinoma sahip olduklarından aynı özdeğerlere sahiptirler.

Örk: $T=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ve $S=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ olarak verilsin

242

T'nin özdeğerleri $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ dür.

$\left(\det(T-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda) \right)$

$A=S^{-1}TS$ alırsak, A'nın özdeğerleri $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ dür. Gerçekten

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 6 & 6-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$\lambda_1=2, \quad \lambda_2=3$$

243

Köşegenleştirme:

Teorem: A, $n\times n$ tipinde bir matris olsun. $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ A'nın farklı özdeğerleri ve $x_1,x_2,\ldots,x_k$'lar bunlara karşı gelen özvektörler iseler $x_1,x_2,\ldots,x_k$ lineer bağımsızdır.

Tanım:
$$X^{-1}AX=D$$
eşitliğini sağlayan köşegen matris D ve singüler olmayan bir X matrisi varsa, $n\times n$ tipindeki bir A matrisine <u>köşegenleştirilebilir</u> denir. X'e A'yı <u>köşegenleştirir</u> denir.

244

Teorem: Bir $n\times n$ tipindeki A matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart A'nın n tane lineer bağımsız özvektöre sahip olmasıdır.

Notlar: 1) Eğer A köşegenleştirilebilirse, köşegenleştiren matris X'in sütun vektörleri A'nın özvektörleridir ve D'nin köşegen elemanları A'nın ilgili özdeğerleridir.

2) Köşegenleştiren matris X birtane değildir. Köşegenleştiren matris X'in sütun vektörlerinin yerini değiştirerek veya sıfırdan

245

farklı bir skaler ile çarparak yeni köşegenleştiren matris üretir.

3) Eğer A, $n\times n$ tipinde bir matris ve A'nın n tane farklı özdeğeri varsa, A köşegenleştirilebilirdir. Eğer özdeğerler farklı değil ise A'nın köşegenleştirilebilir olup olmaması A'nın n tane lineer bağımsız özvektöre sahip olup olmamasına bağlıdır.

4) Eğer A köşegenleştirilebilir ise
$$A=XDX^{-1}$$

246

dir.

(4)'e göre
$$\begin{aligned} A^2 &= (XDX^{-1})(XDX^{-1}) \\ &= XD^2X^{-1} \end{aligned}$$

genel olarak
$$A^k=XD^kX^{-1}=X\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}X^{-1}$$

dir.

247

örk: 1) $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\end{bmatrix}$ $X=?$ $A^5=?$

$$|A-\lambda I| = \left| \begin{bmatrix}1&-1\\2&4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2-5\lambda+6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

$\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$

iki farklı özdeğer var A köşegenleştirilebilir

$$\left(D=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\right)$$

$\lambda_1=2$'e karşı gelen özvektör

248

$(A-2I)X=0$ $\begin{bmatrix}-1&-1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$-x_1-x_2=0 \Rightarrow X=\alpha\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ $\alpha\in\mathbb{R}$

$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ özvektör

$\lambda_2=3$'e karşı gelen özvektör

$(A-3I)X=0$ $\begin{bmatrix}-2&-1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$2x_1+x_2=0 \Rightarrow X=\alpha\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ özvektör

249

$$X=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-2\end{bmatrix} \Rightarrow X^{-1}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&-1\end{bmatrix}$$

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix}2&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\-2&-6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}=D$$

$A^5=?$ $A=XDX^{-1}$

$A^5=XD^5X^{-1}$

$$D=\begin{bmatrix}2^5&0\\0&3^5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32&0\\0&243\end{bmatrix}$$

250

$$A^5=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}32&0\\0&243\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}64&32\\-243&-243\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-179&-211\\422&454\end{bmatrix}$$

2) $A=\begin{bmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{bmatrix}$ $X=?$ $A^5=?$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}3-\lambda&-1&-2\\2&-\lambda&-2\\2&-1&-1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{array}{l}\lambda_1=0\\ \lambda_2=1\\ \lambda_3=1\end{array}$$

251

$\lambda_1=0$'a karşı gelen özvektör

$AX=0$ $\begin{bmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$X=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ özvektör

$\lambda_2=1=\lambda_3$ karşı gelen özvektör)

$(A-I)X=0$ $\begin{bmatrix}2&-1&-2\\2&-1&-2\\2&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

252

$2x_1-x_2-2x_3=0$

$x_1=\alpha$, $x_3=\beta$ $x_2=2\alpha-2\beta$

$$N(A-I)=\left\{\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}$ özvektörler.

$$X=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&-2\\1&0&1\end{bmatrix}$$

253

$$X^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1&2\\3&-1&-2\\2&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$X^{-1}AX=D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$A^5=XD^5X^{-1}=A$ $(XDX^{-1}=A)$

$A^k=A$ $k\in T$ (~~Pozitif~~ tamsayılar)

254

nxn tipindeki bir A matrisi, n'den daha az sayıda lineer bağımsız özvektöre sahipse, A'ya kusurlu (eksik) denir. Kusurlu matris köşegenleştirilemez.

örk: 1) $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$

$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}1-\lambda&1\\0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2$ $|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1$

$(A-I)X=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

255

$x_2=0 \quad x_1=\alpha \quad x=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ özvektör

A kusurlu matristir köşegenleştirilemez.

2) $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&4&0\\-3&6&2\end{bmatrix}$

$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow (\lambda-2)^2(4-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=4 \quad \lambda_2=\lambda_3=2$

$|B-\lambda I|=0 \Rightarrow \lambda_1=4 \quad \lambda_2=\lambda_3=2$

A ve B matrislerinin özdeğerleri aynı.

256

$\lambda_1=4$ için A'nın bir özvektörü

$(A-4I)X=0 \quad \begin{bmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$x_1=0 \quad x_3=0 \quad x_2=\alpha \quad \alpha\in\mathbb{R}$

$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ A'nın bir özvektörü

B'nin bir özvektörü

$(B-4I)X=0 \quad \begin{bmatrix}-2&0&0\\-1&0&0\\-3&6&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$

257

$x_1=0 \quad 6x_2-2x_3=0 \quad x_3=\alpha \quad x_2=\frac{1}{3}\alpha$

$\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$

$\lambda_2=\lambda_3=2$ için A'nın bir özvektörü?

$(A-2I)X=0 \quad \begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$

$x_2=0 \quad x_1=0 \quad x_3=\alpha \quad \alpha\in\mathbb{R}$

$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ özvektör

258

A kusurludur köşegenleştirilemez.

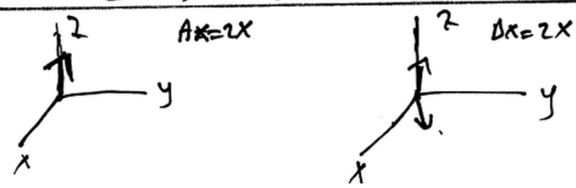
B'nin özvektörü?

$(B-2I)X=0 \quad \begin{bmatrix}0&0&0\\-1&2&0\\-3&6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$

$-x_1+2x_2=0 \quad x_2=\alpha \quad x_1=2\alpha \quad x_3=\beta$

$N(B-2I)=\left\{\alpha\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$

$\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ özvektörler. B köşegenleştirilebilir.



259

6. DİKLİK

$\mathbb{R}^n$'de skaler çarpım:

$\mathbb{R}^n$'de iki vektör x ve y'yi $n\times 1$ tipinde matrisler olarak düşünebiliriz. Bu durumda $x^T.y$ çarpımını $\mathbb{R}^1$'de 1×1 tipinde bir matris veya bir reel sayı olarak ifade edebiliriz. $x^T.y$ çarpımına, x ve y'nin <u>skaler çarpımı</u> denir.

$y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$

260

Eğer $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ ve $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$ ile

$x^T.y=(x_1,x_2,\dots,x_n)\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$

$=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$

Örk: $x=\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}$ ve $y=\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}=(1,2,5)^T$ ile

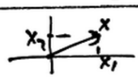
$x^T.y=[4\ 1\ -2]\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}=4.1+1.2+(-2).5$
$=-4$

261

$\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$'de skaler çarpım:

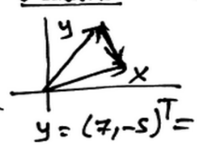
$\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$'de skaler çarpımın geometrik anlamı verebiliriz. $\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$'de vektörleri yönlü (doğrultu) doğru parçaları olarak düşünebiliriz. $\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$'de verilen bir x vektörü için onun öklid uzunluğu, kendisiyle skaler çarpımının karekökü olarak tanımlanır.

$\|x\|=\sqrt{x^T.x}=\begin{cases}\sqrt{x_1^2+x_2^2}, & x\in\mathbb{R}^2\\ \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, & x\in\mathbb{R}^3\end{cases}$



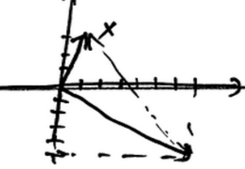
262

Tanım: $\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$'de verilen x ve y vektörleri arasındaki <u>uzaklık</u> $\|x-y\|$ olarak tanımlanır.



Örk: $x=(1,3)^T \quad y=(7,-5)^T=\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix}$

$\|x-y\|=\sqrt{(1-7)^2+(3-(-5))^2}=10$



$x-y=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-7\\3-(-5)\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}-6\\8\end{bmatrix}$

Teorem: x ve y, $\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$'de sıfırdan farklı iki vektör ve θ, bunların arasındaki açı ise

$$x^T \cdot y = \|x\|\,\|y\|\cos\theta$$

dır.

Eğer x sıfırdan farklı bir vektör ise bu vektör doğrultusundaki birim vektör

$$u = \frac{1}{\|x\|}\cdot x \quad \text{dır.}$$

Bu durumda x ve y arasındaki açı θ ise

$$\cos\theta = \frac{x^T \cdot y}{\|x\|\,\|y\|} = u^T \cdot v \qquad u = \frac{x}{\|x\|} \qquad v = \frac{y}{\|y\|}$$

dır.

Örk: $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ve $y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ise x ve y arasındaki açı?

$$\|x\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\|y\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \boxed{\sqrt{5}}$$

$$u = \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

$$v = \frac{y}{\|y\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\cos\theta = u^T \cdot v = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{3}{5\sqrt{5}} + \frac{8}{5\sqrt{5}} = + \frac{\cancel{5}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği: x ve y, $\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$'de vektörler ise

$$|x^T y| \le \|x\|\,\|y\|$$

dır. Eşitlik ancak ve ancak vektörlerden biri sıfır veya biri diğerinin katı olduğunda sağlanır.

Eğer $x^T \cdot y = 0$ ise yukardaki teoreme göre vektörlerden biri sıfır veya $\cos\theta = 0$ dır. $\cos\theta = 0$ ise bu iki vektör birbirine diktir.